

La parabola è una delle coniche fondamentali, ed è definita come il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso (detto **fuoco**) e da una retta fissa (detta **direttrice**). In questo contesto, vogliamo analizzare tre elementi chiave della parabola: il **vertice**, il **fuoco** e la **direttrice**.

1. Vertice

Il vertice è il punto di "massima curvatura" della parabola, ossia il punto in cui la parabola cambia direzione. È anche il punto più vicino alla direttrice. Nelle equazioni standard della parabola, il vertice rappresenta l'origine del sistema di riferimento relativo alla parabola stessa.

Equazione canonica della parabola

- Se la parabola ha asse di simmetria verticale (parallelo all'asse y):

$$y = ax^2 + bx + c$$

Il vertice si trova nel punto:

$$V \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right),$$

dove $\Delta = b^2 - 4ac$ è il discriminante dell'equazione.

- Se la parabola ha asse di simmetria orizzontale (parallelo all'asse x):

$$x = ay^2 + by + c$$

Il vertice si trova nel punto:

$$V \left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a} \right).$$

2. Fuoco

Il fuoco è un punto fisso che, insieme alla direttrice, definisce la parabola. La distanza tra il fuoco e il vertice è determinata dal parametro p , chiamato **parametro focale**. La sua posizione dipende dall'orientamento della parabola:

- Se la parabola ha asse di simmetria verticale ($y = ax^2 + bx + c$):
 - Il fuoco si trova a una distanza $p = \frac{1}{4a}$ dal vertice lungo l'asse di simmetria.
 - Se $a > 0$, il fuoco è sopra il vertice; se $a < 0$, il fuoco è sotto il vertice.
 - Coordinate del fuoco:

$$F \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a} \right).$$

- Se la parabola ha asse di simmetria orizzontale ($x = ay^2 + by + c$):
 - Il fuoco si trova a una distanza $p = \frac{1}{4a}$ dal vertice lungo l'asse di simmetria.
 - Se $a > 0$, il fuoco è a destra del vertice; se $a < 0$, il fuoco è a sinistra del vertice.
 - Coordinate del fuoco:

$$F\left(-\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}, -\frac{b}{2a}\right).$$

3. Direttrice

La direttrice è una retta perpendicolare all'asse di simmetria della parabola. La sua posizione dipende anch'essa dal parametro $p = \frac{1}{4a}$:

- Se la parabola ha asse di simmetria verticale ($y = ax^2 + bx + c$):
 - La direttrice è una retta orizzontale posta a una distanza p dal vertice, opposta rispetto al fuoco.
 - Equazione della direttrice:

$$y = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}.$$

- Se la parabola ha asse di simmetria orizzontale ($x = ay^2 + by + c$):
 - La direttrice è una retta verticale posta a una distanza p dal vertice, opposta rispetto al fuoco.
 - Equazione della direttrice:

$$x = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}.$$

Esempio pratico

Consideriamo la parabola con equazione:

$$y = 2x^2 - 4x + 1.$$

1. Vertice:

- Calcoliamo le coordinate del vertice:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right),$$

dove $a = 2$, $b = -4$, $c = 1$, e $\Delta = (-4)^2 - 4(2)(1) = 16 - 8 = 8$.

Quindi:

$$V\left(-\frac{-4}{2(2)}, -\frac{8}{4(2)}\right) = V(1, -1).$$

2. Fuoco:

- Calcoliamo il parametro focale:

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4(2)} = \frac{1}{8}.$$

Il fuoco si trova sopra il vertice (poiché $a > 0$):

$$F\left(1, -1 + \frac{1}{8}\right) = F\left(1, -\frac{7}{8}\right).$$

3. Direttrice:

- L'equazione della direttrice è:

$$y = -1 - \frac{1}{8} = -\frac{9}{8}.$$

Conclusione

Per la parabola $y = 2x^2 - 4x + 1$:

- Vertice: $\boxed{(1, -1)}$,
- Fuoco: $\boxed{\left(1, -\frac{7}{8}\right)}$,
- Direttrice: $\boxed{y = -\frac{9}{8}}$.