Il **teorema del valore medio per gli integrali** afferma che se f è una funzione continua su un intervallo chiuso $[a, b]$, allora esiste almeno un punto $c \in [a, b]$ tale che:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

In altre parole, esiste un punto c in cui il valore della funzione $f(c)$ è uguale al valore medio della funzione sull'intervallo $[a, b]$.

Vediamo ora tre esercizi esplicativi per applicare questo teorema.

Esercizio 1

Calcola il valore medio della funzione $f(x) = x^2$ sull'intervallo $[0, 2]$ e determina il punto c in cui la funzione assume tale valore.

Soluzione:

1. Calcoliamo l'integrale di $f(x) = x^2$ su $[0, 2]$:

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}.$$

2. Troviamo il valore medio:

$$\text{Valore medio} = \frac{1}{2-0} \int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

3. Determiniamo il punto c in cui $f(c) = \frac{4}{3}$:

$$c^2 = \frac{4}{3} \implies c = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Poiché $c \in [0, 2]$, la soluzione è accettabile.

Risposta:

Il valore medio è $\frac{4}{3}$, e il punto c è $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Esercizio 2

Trova il valore medio della funzione $f(x) = \sin(x)$ sull'intervallo $[0, \pi]$ e determina il punto c in cui la funzione assume tale valore.

Soluzione:

1. Calcoliamo l'integrale di $f(x) = \sin(x)$ su $[0, \pi]$:

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2.$$

2. Troviamo il valore medio:
$$\text{Valore medio} = \frac{1}{\pi - 0} \int_0^\pi \sin(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 = \frac{2}{\pi}.$$
3. Determiniamo il punto c in cui $f(c) = \frac{2}{\pi}$:
$$\sin(c) = \frac{2}{\pi}.$$
La soluzione è $c = \arcsin\left(\frac{2}{\pi}\right)$, che appartiene a $[0, \pi]$.

Risposta:
Il valore medio è $\frac{2}{\pi}$, e il punto c è $\arcsin\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

Esercizio 3

Calcola il valore medio della funzione $f(x) = e^x$ sull'intervallo $[0, 1]$ e determina il punto c in cui la funzione assume tale valore.

Soluzione:

1. Calcoliamo l'integrale di $f(x) = e^x$ su $[0, 1]$:
$$\int_0^1 e^x\, dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$
2. Troviamo il valore medio:
$$\text{Valore medio} = \frac{1}{1 - 0} \int_0^1 e^x\, dx = \frac{1}{1} \cdot (e - 1) = e - 1.$$
3. Determiniamo il punto c in cui $f(c) = e - 1$:
$$e^c = e - 1 \implies c = \ln(e - 1).$$
Poiché $e - 1 > 1$, $c \in [0, 1]$.

Risposta:
Il valore medio è $e - 1$, e il punto c è $\ln(e - 1)$.

Questi esercizi mostrano come applicare il teorema del valore medio per gli integrali per trovare il valore medio di una funzione e determinare il punto in cui la funzione assume tale valore.